<u>Ιούνιος 2023, Απειροστικός Λογισμός 1</u>

<u>Διάρκεια 3 Ώρες</u>

Θέμα 1(1,5 Μονάδες)
Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι άνω φραγμένη (Υπόδειξη: Με εις άτοπον απαγωγή).

Θέμα 2 (1,5 Μονάδες) Δίνεται το σύνολο $A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [3, 4)$. Εξετάστε αν το A έχει ελάχιστο στοιχείο (minimum), μέγιστο στοιχείο (maximum), supremum, infimum και προσδιορίστε τις τιμές τους (αν υπάρχουν).

Θέμα 3 (2,5 Μονάδες)

(α) Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, να δείξετε ότι $a_n \cdot b_n \to 0$.

(β) Υπολογίστε τα όρια (αν υπάρχουν) των ακολουθιών:

(i) $x_n = \sqrt[n]{8 \cdot 3^n + 5^n}$

(ii) $y_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$

(iii) $z_n = \dfrac{5}{n} + (-1)^n$

Θέμα 4 (2 Μονάδες)

(a) Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \in \mathbb{Q}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(b) Έστω $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε την τιμή $f(0)$.

Θέμα 5 (1,5 Μονάδες)
Έστω $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$ και f' αύξουσα. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το ΘΜΤ του Διαφορικού Λογισμού).

Θέμα 6 (1 Μονάδα)
Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $f'(x) \geq \dfrac{1}{3}$, για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!